série n°13

Exercice N°1

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (1 + i)z + 2(1 + i) = 0$.
   a) Vérifier que $(1 - 3i)^2 = -8 - 6i$.
   b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $2i$, $1-i$, $3-i$ et $3+i$.
   a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   b) Montrer que le triangle ABD est isocèle.
   c) Montrer que les points B et D sont symétriques par rapport à la droite (AC).
   d) Calculer l'aire du triangle ABC et en déduire l'aire du quadrilatère ABCD.

Exercice N°2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-1, 0, 0)$ et $I(1, 2, 1)$.

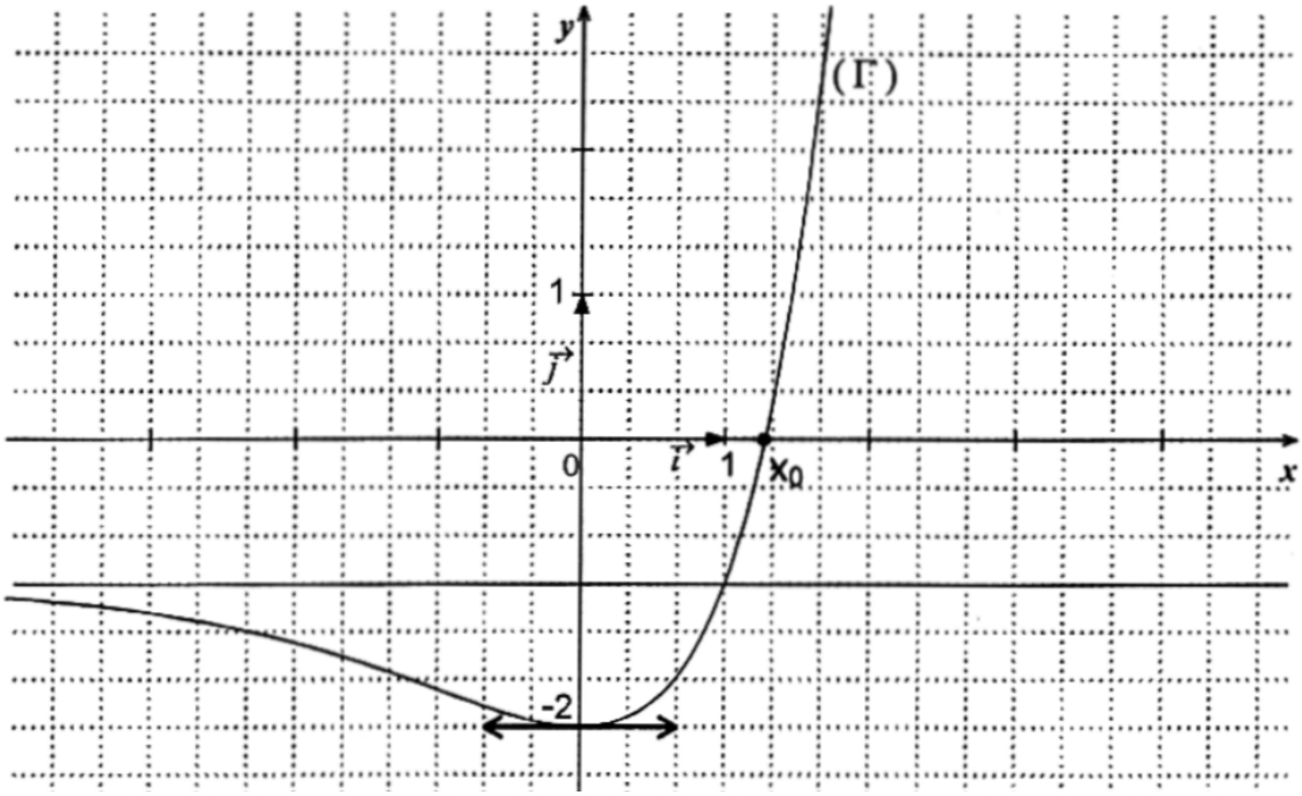
1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés .
   b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x + y - z + 1 = 0$.
2) Soit la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$.
   a) Montrer que (S) a pour centre le point I et déterminer son rayon.
   b) Montrer que le plan P est tangent à (S) au point A.
   c) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

---

3) Soit H le milieu du segment $[IA]$ et Q le plan passant par H et parallèle à P .
   a) Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle $(\mathcal{C})$.
   b) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice 4

1) La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :
   - La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.
   - La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.
   - La courbe (Γ) coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en un unique point d'abscisse x_0.



En utilisant le graphique :

a) Déterminer g(0) et g'(0).

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\alpha x + \beta)\, e^x - 1$ où α et β sont deux réels.

a) Exprimer g(0) et g'(0) en fonction de α et β .

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x, $g(x) = (x - 1)\, e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 - 1}$.

d) Tracer $(\mathscr{C})$. (on prendra $x_0 = 1,2$).